



COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS DE SENSIBILIDAD: SOBOL, MORRIS Y MONTE CARLO EN EL MODELO LOGÍSTICO

COMPARISON OF SENSITIVITY METHODS: SOBOL, MORRIS, AND MONTE CARLO IN THE LOGISTIC MODEL

Diana Carolina Tumbaco Mendoza¹, Marlon Danilo Basantes Valverde²

{diana.tumbaco@unach.edu.ec¹, mbasantes@unach.edu.ec²}

Fecha de recepción: 31/04/2025 / Fecha de aceptación: 20/05/2025 / Fecha de publicación: 15/06/2025

RESUMEN: Este estudio se enmarca en un enfoque cuasi-experimental mediante simulación, con el objetivo de analizar la sensibilidad global de un modelo logístico calibrado para describir la evolución de la población infectada por meningitis en Ecuador. Se utilizaron registros anuales de mortalidad por enfermedades infecciosas de los países de la Comunidad Andina, extraídos del Global Burden of Disease (IHME), los cuales permitieron calibrar los parámetros clave: capacidad de carga (K), tasa de crecimiento (r) y población inicial infectada (P_0), explorados en un rango de $\pm 30\%$ respecto a sus valores calibrados. Se aplicaron tres técnicas de análisis de sensibilidad global, Sobol, Morris y Monte Carlo Filtering (MCF), a lo largo de un horizonte temporal de 30 años. Los resultados evidencian que la sensibilidad de los parámetros varía con el tiempo. Morris mostró que P_0 domina al inicio, r en la fase de crecimiento y k en el largo plazo. Sobol confirmó esta dinámica e identificó interacciones clave entre parámetros durante las transiciones del modelo. MCF, en cambio, clasificó las simulaciones como aceptables o no, según criterios epidemiológicos, revelando que combinaciones de r y k son determinantes para superar el umbral poblacional crítico en etapas avanzadas del brote. Para comparar de forma coherente los tres enfoques, se implementó una normalización comparativa que cuantificó y visualizó la contribución relativa de cada parámetro en cada método. Este proceso fue clave para superar las diferencias estructurales entre los índices generados por cada técnica, permitiendo una interpretación rigurosa de los resultados, revelando no solo qué parámetros son más influyentes, sino también cuándo y cómo interactúan en distintas fases del sistema, lo que resulta esencial para anticipar escenarios epidemiológicos. El estudio proporciona una herramienta analítica para priorizar intervenciones de salud pública según la fase del brote de acuerdo con el contexto ecuatoriano.

Palabras clave: *Análisis de sensibilidad global, Modelo logístico epidemiológico, Método de Sobol, Epidemiología computacional, Monte Carlo Filtering (MCF)*

¹Universidad Nacional de Chimborazo, (UNACH) Dirección de Posgrado, Programa de Maestría en Matemática aplicada con mención en Matemática Computacional, <https://orcid.org/0009-0007-2364-0421>.

²Universidad Nacional de Chimborazo, (UNACH) Facultad de Ciencias, Escuela de Telecomunicaciones, Grupo de Investigación GI(CT)²I, <https://orcid.org/0000-0001-6011-1659>.



ABSTRACT: This study adopts a quasi-experimental simulation-based approach to analyze the global sensitivity of a calibrated logistic model describing the evolution of the infected population due to meningitis in Ecuador. Annual mortality records for infectious diseases from Andean Community countries sourced from the Global Burden of Disease (IHME) were used to calibrate the key parameters: carrying capacity (K), growth rate (r), and initial infected population (P_0), each explored within a $\pm 30\%$ range of their calibrated values. Three global sensitivity analysis (GSA) methods, Sobol, Morris, and Monte Carlo Filtering (MCF) were applied over a 30-year time horizon. Results show that parameter sensitivity changes over time: P_0 dominates in the early stages, r during the exponential growth phase, and K in the long term. Sobol confirmed this progression and identified critical parameter interactions during model transitions. In contrast, MCF classified simulations as acceptable or unacceptable based on epidemiological thresholds, revealing that combinations of r and K are decisive in surpassing critical population thresholds in advanced stages of the outbreak. To ensure coherent comparison across methods, a normalization procedure was implemented, quantifying and visualizing the relative contribution of each parameter across techniques. This step was crucial to harmonizing the structural differences among the sensitivity indices, enabling a rigorous interpretation of results that reveals not only which parameters are most influential but also when and how they interact throughout different phases of the system. The study offers a robust analytical tool for prioritizing public health interventions tailored to the timing and dynamics of outbreaks in the Ecuadorian context.

Keywords: *Global sensitivity analysis, Logistic epidemiological model, Sobol method, Computational epidemiology, Monte Carlo Filtering (MCF)*

INTRODUCCIÓN

El Análisis de Sensibilidad Global (ASG) es una herramienta fundamental para los modelos matemáticos, lo que permite determinar cuáles de los parámetros influyen más en sus resultados. En epidemiología, por ejemplo, un modelo logístico que describe con precisión la dinámica de propagación de enfermedades a través de curvas en “S” (1), es crucial porque ayuda a entender qué factores son clave en la propagación de enfermedades. Sin embargo, estos parámetros no son fijos; tienen una dependencia clara del tiempo por lo que cambian debido a factores como las estaciones, la inmunidad adquirida o nuevas estrategias de salud (2, 3). Así, el ASG se adapta y sigue siendo una herramienta vital para enfrentar desafíos en salud.

A partir de la pandemia de COVID-19, el estudio de la propagación y evolución de enfermedades infecciosas ha cobrado una relevancia sin precedentes en la salud pública. En regiones como los países andinos, donde ciertas enfermedades muestran patrones estacionales relacionados con factores climáticos como la temporada invernal, el estudio de su evolución temporal es crucial para la planificación de intervenciones sanitarias.



El análisis de sensibilidad ha evolucionado desde enfoques locales hacia técnicas globales, permitiendo una evaluación más integral y precisa de la influencia de los parámetros de entrada en los modelos complejos mediante técnicas avanzadas como Monte Carlo y Sobol. Estas metodologías han mejorado significativamente la interpretación de la variabilidad de los parámetros, facilitando la toma de decisiones en diversos campos científicos (4, 5).

Dentro del marco de la modelización epidemiológica, el análisis de sensibilidad global aplicado al modelo matemático de COVID-19 permite identificar los parámetros más influyentes en la propagación de la enfermedad. Usando el método de Sobol, se evaluó la variabilidad en la tasa de infección, recuperación y mortalidad, resaltando la importancia de la calibración de modelos epidemiológicos. Los resultados indicaron que la tasa de recuperación y la tasa de transmisión son factores clave en la dinámica de los casos (6).

En las últimas investigaciones, el AS enfrenta varios desafíos en los modelos matemáticos con respuesta binaria debido a la escasez de datos, la no linealidad y la correlación entre factores (7); proponen integrar el valor de Shapley para mejorar la precisión del ASG, superando las limitaciones de los métodos tradicionales como Sobol y Morris, ofreciendo una representación más realista de la interacción entre variables.

En algunos casos de estudio en el área de la farmacología, el ASG ha sido utilizado para identificar los parámetros más influyentes en las propiedades farmacocinéticas, como la concentración máxima plasmática (C_{max}), el tiempo para alcanzarla (T_{max}) y el área bajo la curva de concentración (AUC) (8) comparan los métodos de Morris, Sobol y Sobol extendido en un modelado farmacocinético para optimizar tratamientos médicos y mejorar la predicción de respuestas a fármacos.

En otro caso se realizó un AS de Morris para clasificar y comparar la influencia de diferentes parámetros de diseño en el consumo energético, determinado mediante EnergyPlus para el clima típico actual y el escenario SSP5-8.5 (9).

Claramente el ASG ha evolucionado significativamente con el desarrollo de métodos como Sobol, Morris y MCF, los que permiten un análisis más completo de los modelos matemáticos y, con la ayuda de herramientas computacionales, se ha experimentado un avance notable a lo largo del tiempo. En los últimos años paquetes como Sensobol (10) y SALib (11) han transformado la forma en que se realizan los cálculos puesto que ofrecen una mayor flexibilidad; además, con la capacidad de generar visualizaciones listas para su publicación.

Finalmente, dado que los patrones epidemiológicos no son estáticos, este estudio examina la dinámica temporal de la sensibilidad de parámetros con datos de mortalidad por meningitis en Ecuador (1990-2022), evaluando su cambio en distintos horizontes temporales.

El objetivo de esta investigación es comparar tres enfoques principales de ASG (5, 12): Morris, Sobol y Monte Carlo Filtering (MCF), aplicados a la ecuación de crecimiento logístico de Verhulst



para modelar la evolución de la meningitis en Ecuador, garantizando la confiabilidad del modelo y favoreciendo una planificación sanitaria más eficiente.

Este estudio mejora la comprensión de la meningitis en Ecuador y ofrece un marco replicable para otras enfermedades infecciosas de importancia sanitaria, optimizando modelos predictivos y mejorar las estrategias de salud pública para mitigar futuros brotes.

MATERIALES Y MÉTODOS

Diseño de la investigación: Se aplicaron tres técnicas de ASG sobre un modelo logístico, comparando sus resultados mediante un estudio de simulación cuasi-experimental bajo condiciones equivalentes. La metodología combina técnicas cuantitativas de análisis numérico, modelación y estadística no paramétrica para analizar el comportamiento de los parámetros de entrada en diferentes horizontes temporales.

Población: La población comprende los registros anuales de mortalidad por enfermedades infecciosas: meningitis, malaria, tuberculosis, VIH/SIDA, enfermedades diarreicas, infecciones respiratorias bajas y trastornos neonatales, en países de la Comunidad Andina (Bolivia, Colombia, Ecuador y Perú), extraídos del IHME Global Burden of Disease (13). Se utilizaron un total de 132 registros anuales (30 años por 4 países), que permitieron calibrar el modelo y establecer rangos plausibles para el análisis de sensibilidad.

Entorno del estudio: El análisis se realizó in silico utilizando Python y paquetes especializados como SALib(11) para el Análisis de Sensibilidad (AS). La base de datos (13) proporcionó el estudio epidemiológico, pero sin un entorno geográfico físico ya que el estudio es solo un modelado.

Intervenciones técnicas y análisis: Se utilizó un modelo de crecimiento logístico, conocido como modelo de Verhulst(1). La ecuación en este estudio modela la dinámica acumulada de muertes por la enfermedad:

$$\frac{dP}{dt} = P \left(1 - \frac{P}{K} \right) \quad (1)$$

con solución

$$P(t) = \frac{k}{\frac{k - P_0}{P_0} e^{-rt} + 1} \quad (2)$$

Donde, K es el número máximo de casos esperados, r la tasa de crecimiento intrínseca y P_0 es la Población inicial.



El modelo fue calibrado con datos históricos usando mínimos cuadrados no lineales, obteniendo estimaciones puntuales para K , r y P_0 . A partir de estas, se definieron rangos de incertidumbre que capturan su variabilidad.

Andrea Saltelli (uno de sus mayores referentes) define el Análisis de Sensibilidad (AS) como el estudio de la influencia de la incertidumbre en los resultados (salida) de un modelo matemático, atribuida a las diferentes incertidumbres en las variables de entrada del modelo(14, 15). Además, resalta la importancia de un ASG (variando todas las entradas simultáneamente) frente a métodos locales (variando un factor por vez), para capturar efectos combinados y comprender mejor la relevancia de cada variable (16).

Siguiendo el artículo (17), se resumen los beneficios y prácticas clave (Tabla 1) para realizar un ASG riguroso.

Tabla 1. Beneficios y Mejores prácticas para el ASG

Mejores prácticas	Beneficios
Exploración completa del espacio de entrada.	Verificación y calidad del modelo.
Uso de métodos apropiados de AS.	Priorización de variables e incertidumbres.
Separación clara entre análisis de incertidumbre y sensibilidad.	Soporte a la toma de decisiones.
Validación de la robustez de los resultados.	
Aplicación de técnicas de reducción de dimensionalidad.	
Interpretación transparente de los resultados.	

El Método de Morris es un método de análisis de sensibilidad conocido como método de efectos elementales(15), fue implementado para identificar los parámetros (K , r , P_0) más influyentes en la dinámica del modelo logístico. Esta técnica se basa en la evaluación de cambios incrementales en la salida del modelo como respuesta a perturbaciones controladas en cada parámetro, permitiendo detectar su efecto medio global (μ^*) y variabilidad (σ), la cual está asociada a posibles interacciones o efectos no lineales. Los efectos elementales se calcularon en distintos puntos temporales ($t = 0$ a $t = 30$) para evaluar cómo varía la sensibilidad de los parámetros a lo largo del tiempo. Esta metodología complementa de manera cualitativa, los análisis realizados con Sobol y MCF.

El Método de Sobol se basa en la descomposición de la varianza de la salida del modelo, permitiendo cuantificar el aporte individual de cada parámetro (índices de primer orden S_1), así como sus posibles interacciones con otros factores (índices de efecto total S_T) (18). El análisis se realizó en un horizonte de 0 a 30 años, evaluando la sensibilidad de los parámetros en distintos momentos. Esto permitió identificar no solo los parámetros más influyentes, sino también cómo su relevancia varía a lo largo del tiempo.



El Método de Monte Carlo Filtering (MCF) realiza un análisis de sensibilidad regional que distingue qué parámetros son más relevantes según el cumplimiento de un objetivo de salida específico (19,20). Para el modelo logístico de meningitis en Ecuador, se realizaron simulaciones variando parámetros en $\pm 30\%$ respecto a sus valores calibrados. Cada simulación se evaluó según si la población en $t = 30$ superaba el umbral de aceptabilidad ($P(t=30) > 5000$), clasificándose en subconjuntos, conductual (aceptadas) y no conductual (rechazadas). Posteriormente, se analizaron las distribuciones de entrada para ambos subconjuntos mediante funciones de distribución acumulativa empíricas (ECDFs), complementadas con la prueba de Kolmogorov-Smirnov (KS) para detectar diferencias estadísticamente significativas.

Herramientas de software: El AS fue desarrollado utilizando Python y bibliotecas de código abierto. Para implementar los métodos Sobol y Morris, se empleó la librería *SALib* (Sensitivity Analysis Library), ampliamente validada para el AS en modelos matemáticos (14).

Debido a que MCF no está implementado en *SALib*, se desarrollaron scripts personalizados para generar muestras aleatorias, ejecutar el modelo logístico, clasificar simulaciones según un umbral de aceptabilidad y aplicar Kolmogorov-Smirnov (KS), siguiendo la adaptación propuesta para modelos epidemiológicos (21). Esta implementación permitió analizar la dinámica temporal, una característica poco explorada, facilitando una comparación con Sobol y Morris.

RESULTADOS

En esta sección se presentan los hallazgos que evidencian la aplicación de cada método al modelo logístico.

- 1. Filtrado y preparación de datos:** Para comenzar, se filtran los datos para incluir solo los países de la Comunidad Andina (CAN) (Bolivia, Colombia, Ecuador y Perú, cada país con datos anuales de 1990 a 2022) y las causas de muerte infecciosas: Meningitis, Malaria, Tuberculosis, HIV/SIDA, Enfermedades diarreicas, Infecciones respiratorias y neonatales.
- 2. Limpieza de datos:** En este apartado se verifica la exclusión de valores faltantes y atípicos. Asimismo, se ordenan los datos por país y año para asegurar la continuidad temporal. Tras este filtrado, los datos que son ahora un conjunto limpio determinan la base de ajuste del modelo logístico por país y enfermedad.
- 3. Estimación de parámetros:** Se emplea un modelo de crecimiento logístico para ajustar la tendencia temporal de cada enfermedad en cada país, siendo: $P(t)$ el número de muertes anuales en el tiempo t ; K la capacidad de carga al que tiende $P(t)$ cuando t crece; r la tasa de crecimiento que controla la rapidez con la que se acerca a K y P_0 correspondiente al nivel de muertes al inicio del período (año base 1990).

Para cada combinación de país y enfermedad, se ajustaron los tres parámetros K , r y P_0 y se utilizó la librería *scipy.optimize.curve_fit* (11) para los valores iniciales para la optimización.



Se fijó K por encima del valor máximo observado (10%) y P_0 cercano al primer valor; r comenzó con un valor positivo (0.1) asumiendo un ajuste gradual; y se impusieron además restricciones de positividad ($K > 0$, $P_0 > 0$ y $r \geq 0$).

Finalmente, utilizando *curve_fit*, se obtuvo una serie ($K_{ajustado}$, $r_{ajustado}$, $P_{0ajustado}$) que fue la que mejor reprodujo los datos.

4. Verificación y calidad del ajuste del modelo: En el ajuste de la ecuación logística para las enfermedades infecciosas se obtuvieron, en general, resultados satisfactorios. Los parámetros K y r se estimaron con valores plausibles en la mayoría de las combinaciones país-enfermedad, obteniéndose así altos coeficientes de determinación (R^2) y bajos errores de ajuste (MSE).

La Tabla 2 muestra los parámetros ajustados del modelo logístico para la propagación de la meningitis en tres países de la región andina (Ecuador, Bolivia y Perú).

Tabla 2. Parámetros de ajuste del modelo logístico para la propagación de la meningitis en tres países.

<i>País</i>	<i>Enfermedad</i>	<i>K</i>	<i>r</i>	<i>P₀</i>	<i>MSE</i>	<i>R²</i>
<i>Ecuador</i>	Meningitis	5732.0501	0.179661	631.627755	18939.57	0.993629
<i>Bolivia</i>	Meningitis	7476.67235	0.171925	1156.44127	59742.69	0.986614
<i>Perú</i>	Meningitis	8568.48663	0.181889	1413.80260	87700.18	0.984918

Los datos muestran un ajuste robusto para los tres países, con valores de R^2 cercanos a 1, y el MSE más bajo, lo que indica que el modelo logístico describe bien la propagación de la meningitis en estos países; notándose que, para la Meningitis en el Ecuador (Figura 1), este modelo tiene un muy buen ajuste por lo que se puede proceder con el ASG.

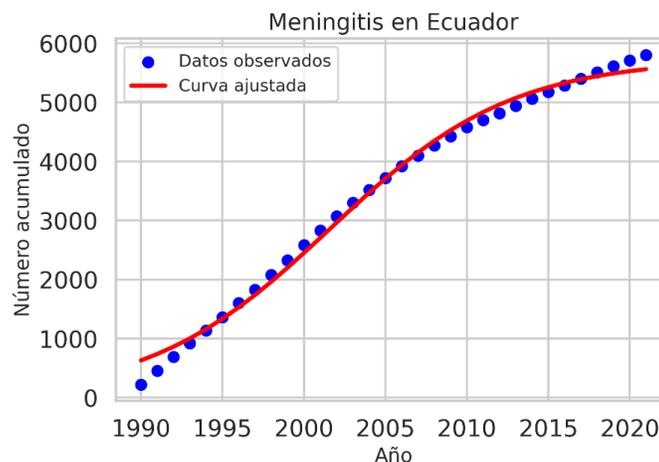


Figura 1. Número acumulado de casos de Meningitis en Ecuador desde 1990 hasta 2022.



5. Resultados individuales de cada método: En este punto se comparan los resultados de sensibilidad del modelo logístico para casos de meningitis en Ecuador en ($t = 5, 10, 15, 20, 25$ y 30 años). Este análisis permitió evaluar cómo la sensibilidad de los parámetros cambia en diferentes etapas temporales debido a cambios estructurales en los datos.

- Capacidad de carga (K) = 5732.05012,
- Tasa de crecimiento (r) = 0.179661, y
- Población inicial (P_0) = 631.627755,

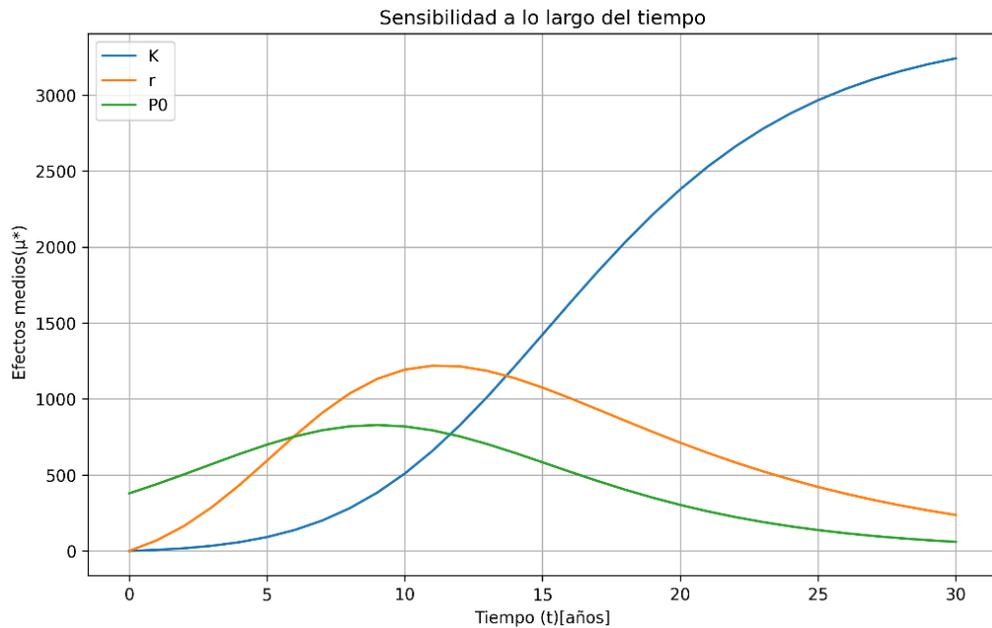
Estos valores se consideran la referencia principal. Además, se asume que cada parámetro podía variar $\pm 30\%$ alrededor de su valor base, lo que permite explorar variaciones realistas sin exceder los límites razonables.

Morris: Los resultados muestran una evolución temporal clara en la influencia de los parámetros del modelo. En la Tabla 3 se reportan los valores de μ^* y σ para cada parámetro en distintos momentos del tiempo.

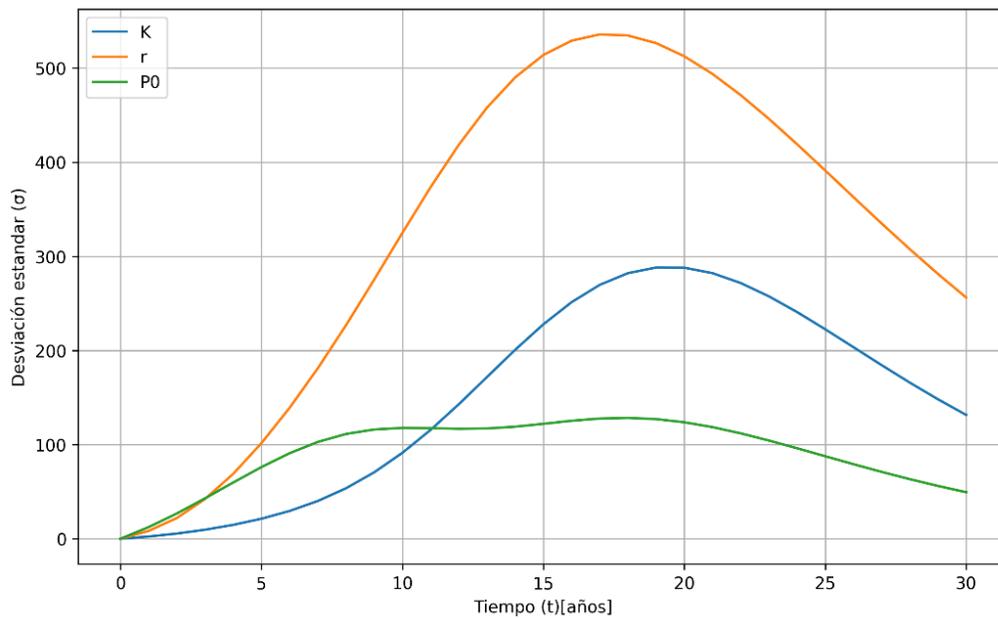
Tabla 3. Sensibilidad de los parámetros K , r y P_0 en función μ^* y σ en diferentes tiempos.

Temp	μ_K^*	σ_K	μ_r^*	σ_r	σ_{P_0}	σ_{P_0}
0	0	0	0	0	378.976653	0
5	91.026986	21.2382425	594.174441	101.611791	699.478151	76.1526817
10	509.09487	91.2945524	1192.68540	324.994738	819.236131	117.699929
15	1423.5691	227.802908	1074.71721	513.965180	583.096772	122.07448
20	2379.3274	287.94234	712.166465	512.600728	302.748472	123.72856
25	2965.4443	222.55830	421.227333	391.2410027	137.3237413	87.650373
30	3240.7837	131.533537	236.819232	256.2558713	59.3281093	49.3912432

Este análisis permitió estimar μ^* (efecto medio absoluto) y σ (variabilidad de los efectos elementales), proporcionando una mejor caracterización del impacto de cada parámetro en la dinámica del modelo (Figura 2).



(a)



(b)

Figura 2. (a) Gráfica de μ^* : Efecto de impacto de los parámetros en diferentes momentos del tiempo (un alto valor de μ^* implica un gran efecto en el modelo). (b) Gráfica de σ : Variabilidad del impacto de cada parámetro (un σ con valor alto indica que el parámetro tiene efectos no lineales o interacción con otros parámetros).



La Figura 2. (a) muestra que el parámetro K tiene una influencia inicial baja, con valores cercanos a cero en $t = 0$. Sin embargo, su impacto aumenta progresivamente a partir de $t = 12$ y se convierte en el parámetro más influyente desde $t = 14$, con una relevancia que sigue en aumento hasta $t = 30$. Este comportamiento evidencia que K juega un papel clave en el control del comportamiento asintótico del modelo, destacando su importancia en las etapas finales.

Por otro lado, el parámetro r muestra una influencia significativa desde $t = 6$, alcanzando su punto máximo entre $t = 6$ y $t = 14$. A partir de ese momento, su efecto disminuye gradualmente. Este patrón refleja que r es determinante durante la fase de crecimiento exponencial, definiendo la dinámica poblacional en las etapas intermedias. Sin embargo, su relevancia disminuye a medida que la población se aproxima a K .

En cuanto a P_0 , es máxima en los primeros años del análisis, principalmente entre $t = 0$ y $t = 6$, pero decrece de manera progresiva en el tiempo. Este resultado refleja que P_0 establece las condiciones iniciales del sistema y determina el comportamiento inicial del modelo. A medida que el crecimiento poblacional entra en las etapas dominadas por r y K , el impacto de P_0 desaparece gradualmente, perdiendo relevancia en las fases intermedias y finales.

Para la Figura 2. (b) muestra la desviación estándar (σ) de los efectos elementales, lo que permite evaluar la variabilidad de la sensibilidad de los parámetros del modelo. Los resultados destacan que el parámetro r presenta la mayor variabilidad, alcanzando un pico alrededor de $t = 17$. Este comportamiento sugiere que r interactúa de manera significativa con otros parámetros, como K y P_0 , durante la fase de crecimiento rápido del modelo.

En el caso de K , la desviación estándar aumenta gradualmente hasta alcanzar su máximo en $t \approx 19$, para luego disminuir hacia las fases finales del análisis. Este comportamiento refleja que, aunque K domina en la estabilización del modelo en el largo plazo, su efecto es más predecible. Esto sugiere que su impacto depende más de características estructurales del modelo y menos de interacciones con otros parámetros.

Por otro lado, P_0 muestra la menor variabilidad entre los tres parámetros, con una curva más suave y estable a lo largo del tiempo. Esto indica que su efecto es más directo y determinístico, con menor dependencia de interacciones con otros parámetros.

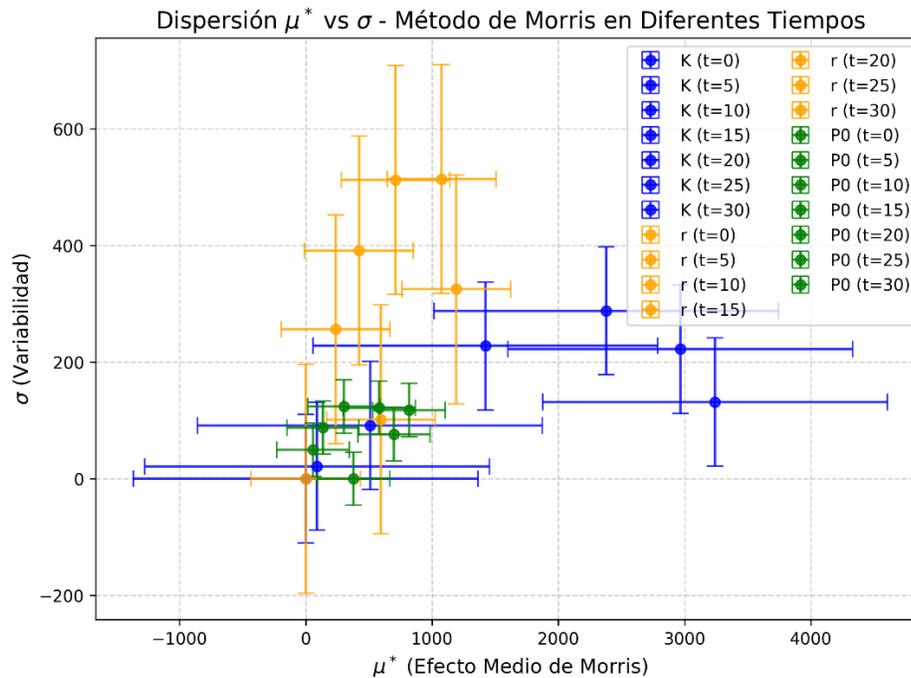


Figura 3. μ^* vs σ : La sensibilidad de los parámetros K , r y P_0 se muestra en el diagrama de dispersión en términos del efecto medio absoluto (μ^*) y su variabilidad (σ) en diferentes tiempos ($t=0, 5, 10, 15, 20, 25, 30$).

La Figura 3 permite analizar tanto la magnitud del impacto de cada parámetro sobre la salida del modelo como la incertidumbre asociada a ese impacto en diferentes simulaciones.

El parámetro K muestra una clara tendencia hacia la derecha en el gráfico conforme avanza el tiempo, indicando un crecimiento sostenido de μ^* , especialmente ($t = 20, 25, 30$). Aunque su σ presenta valores moderados entre (100) y (300), su dispersión vertical es menor en comparación con r , lo que refleja un impacto estructural fuerte pero predecible. Esto destaca la relevancia de K como el parámetro más influyente en la estabilización poblacional a largo plazo.

El parámetro r , exhibe una alta variabilidad (σ) durante la etapa intermedia ($t = 10$ a 20), con valores que superan los (500). Este comportamiento sugiere fuertes interacciones no lineales con otros parámetros K y P_0 . A pesar de que r tiene valores de efecto medio μ^* moderadamente altos, su dispersión indica un impacto menos predecible, lo que enfatiza su relevancia crítica en la fase de crecimiento exponencial del modelo.

Por último, el parámetro P_0 , marcado en verde, muestra altos valores de μ^* en tiempos tempranos ($t = 0$ a 5) que decrecen rápidamente con el tiempo. Su variabilidad (σ) es baja, reflejando un comportamiento estable y altamente predecible. Esto indica que P_0 actúa como un condicionante del modelo, pero pierde influencia conforme la dinámica del sistema pasa a estar dominada por r y K .



Esta visualización complementa el análisis temporal de $\mu^*(t)$ y $\sigma(t)$, proporcionando una perspectiva integral que fortalece la interpretación de la dinámica poblacional.

Sobol: Los resultados permiten cuantificar los índices de primer orden (S_1), los cuales reflejan la influencia individual de cada parámetro en la salida del modelo, K como el factor predominante con un efecto directo y significativo en la estabilidad poblacional. Por su parte, los índices totales (S_T) integran tanto los efectos individuales como las interacciones entre parámetros, revelando cómo las combinaciones de K , r y P_0 contribuyen a moldear la dinámica del sistema.

Para asegurar la precisión de las estimaciones, se realizaron simulaciones complementarias con intervalos de confianza del 95%, permitiendo evaluar la incertidumbre y la consistencia de los resultados.

Tabla 4. Representa la sensibilidad de los parámetros K , r y P_0 en función S_1 y S_T en diferentes tiempos.

Sobol	T	K	r	P0	Sobol	t	K	R	P0
Index					Index				
S1	0	0	0	0.9999969	ST	0	0	0	0.999996
S1	5	0.019201	0.373584	0.59945463	ST	5	0.0229860	0.379809	0.6052037
S1	10	0.094215	0.633109	0.25364413	ST	10	0.112530	0.648098	0.2587486
S1	15	0.259502	0.599437	0.10586477	ST	15	0.29317940	0.630483	0.1117497
S1	20	0.517426	0.404035	0.04077061	ST	20	0.55056535	0.439341	0.0482590
S1	25	0.768845	0.194173	0.01313983	ST	25	0.78853474	0.216978	0.018646
S1	30	0.9152	0.071000	0.0035444	ST	30	0.9233551	0.080850	0.006116

En la Tabla 4, se observa que K presenta los valores más altos de sensibilidad en (S_1) y (S_T), consolidando su papel fundamental. Aunque r tiene una influencia menor, aporta significativamente en ciertos intervalos temporales, especialmente durante la fase de crecimiento del modelo. Por otro lado, P_0 se atenúa con el tiempo y no juega un papel relevante.

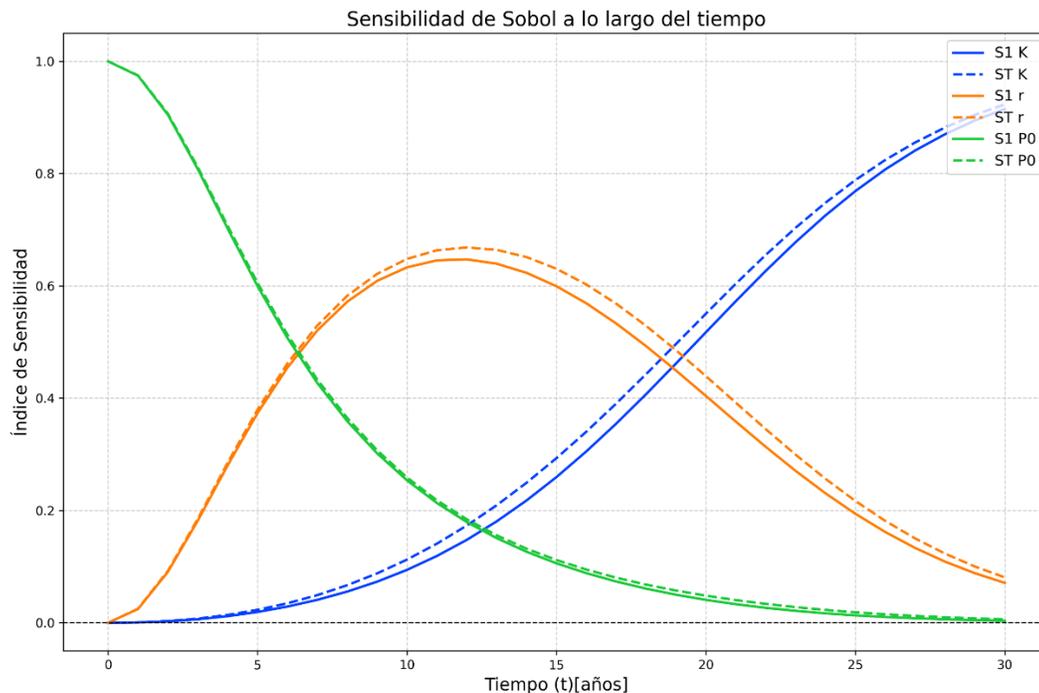


Figura 4. Evolución temporal de los índices de sensibilidad de Sobol (S_1 y S_T) para los parámetros K , r y P_0 . El gráfico muestra cómo la influencia directa (S_1) y total (S_T) de cada parámetro varía a lo largo del tiempo.

En la Figura 4 se presentan los resultados que evidencian cómo en las etapas iniciales, el parámetro P_0 domina la dinámica del sistema; sin embargo, su influencia disminuye gradualmente, cediendo paso a r y K en el desarrollo a largo plazo del modelo. Este comportamiento refleja la transición natural del sistema, mientras P_0 establece el punto de partida del modelo, r y K se convierten en los factores reguladores principales a medida que el sistema se estabiliza.

Un aspecto crucial del análisis es la relación entre los índices S_1 y S_T para cada parámetro. Las intersecciones entre estas curvas a lo largo del tiempo señalan cambios en la importancia relativa de los parámetros. Cuando $S_1 \approx S_T$, el impacto del parámetro es principalmente independiente, indicando que su influencia no depende de interacciones con otros factores. Por el contrario, valores donde $S_1 \ll S_T$ sugieren que el parámetro en cuestión está fuertemente influenciado por interacciones con otros parámetros del sistema. En este estudio, K emerge como el parámetro clave en la estabilidad a largo plazo, mientras que r desempeña un papel significativo en las fases intermedias del modelo, y P_0 se limita a influir en los momentos iniciales.

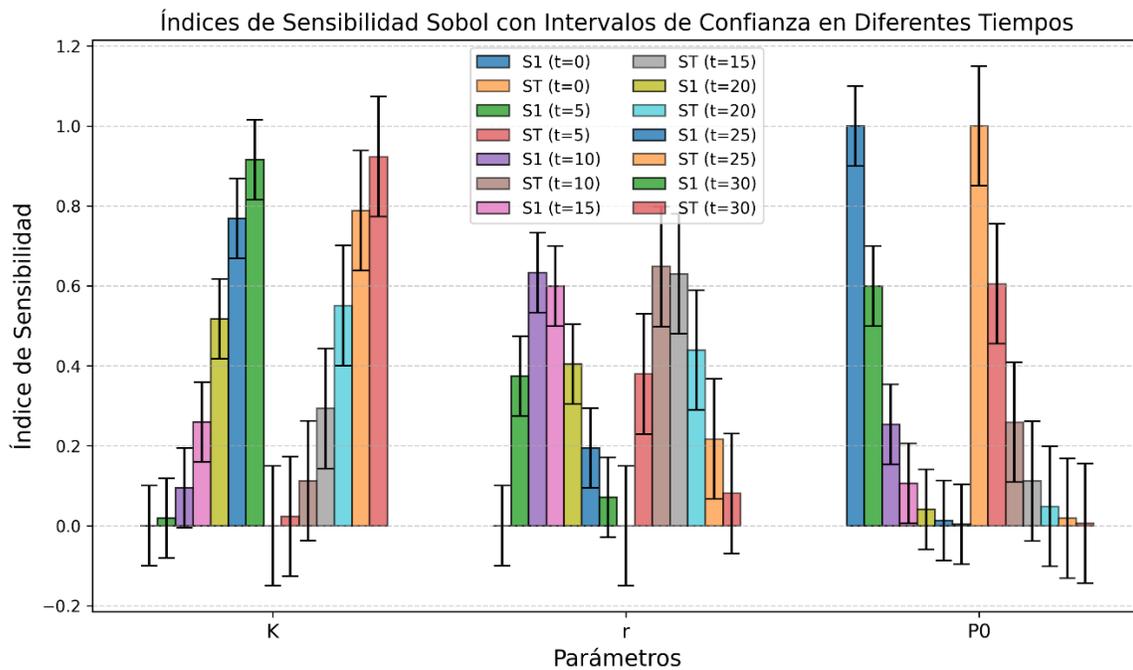


Figura 5. Índices de sensibilidad de Sobol (S_1 y S_T) con intervalos de confianza en función del tiempo para los parámetros K , r y P_0 . El gráfico ilustra los índices de sensibilidad en distintos momentos temporales ($t = 0, 5, 10, 15, \dots, 30$), destacando la importancia de cada parámetro en la dinámica del modelo logístico. Las barras incluyen intervalos de confianza del 95%, representados por líneas verticales negras en la parte superior, que reflejan la incertidumbre asociada a cada estimación.

Los resultados presentados en la Figura 5 muestran como la sensibilidad de K aumenta progresivamente con el tiempo, en las fases finales del modelo. Los índices (S_T) tienen valores cercanos a 1 para ($t = 30$), lo que indica que K contribuye de manera significativa a la dinámica total del sistema en etapas tardías.

Los intervalos de confianza asociados a (S_T) y (S_1) presentan un patrón decreciente en tiempos avanzados ($t > 20$), lo que sugiere que la influencia de K es más estable y predecible cuando el sistema se aproxima al equilibrio poblacional.

Los índices de sensibilidad de r alcanzan valores máximos en la fase intermedia ($t = 10$ a $t = 20$), reflejando su impacto en el crecimiento del sistema. Los intervalos de confianza asociados a (S_T) y (S_1) son moderados y muestran cierta variabilidad, indicando que r interactúa con otros parámetros en esta fase. Esto puede deberse a su dependencia del estado inicial P_0 y de la transición hacia la influencia predominante de K .

La sensibilidad de P_0 es notablemente alta en los primeros tiempos ($t = 0$), lo que confirma su relevancia como condición inicial, a medida que avanza el tiempo, los índices (S_T) y (S_1) disminuyen rápidamente, reflejando su pérdida de importancia a medida que K y r aumentan.



Los intervalos de confianza son más amplios en tiempos iniciales, lo que indica una mayor incertidumbre en la influencia de P_0 durante los primeros momentos del modelo.

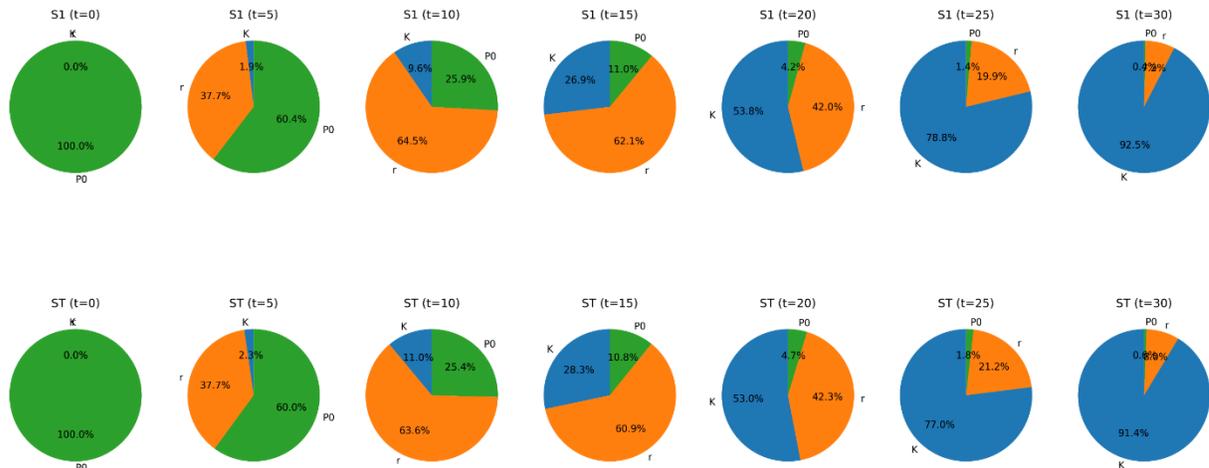


Figura 6. Visualización relativa de la influencia de los parámetros ($t = 0, 5, 10, 15, \dots, 30$). Cada par de gráficos de pastel presenta: S_1 (Sensibilidad de primer orden, gráficos superiores): Indica el efecto directo de cada parámetro sobre la salida del modelo. S_T (Sensibilidad total, gráficos inferiores): Refleja tanto los efectos directos como las interacciones entre parámetros.

En la Figura 6, al inicio del modelo ($t = 0$), P_0 domina completamente (100%). Esto significa que la población inicial determina la dinámica del sistema. Así, en esta etapa temprana, ni r ni K tienen influencia.

Conforme avanza el tiempo, P_0 pierde relevancia gradualmente. En ($t = 5$), r comienza a adquirir importancia con aproximadamente (37.7%) de influencia, mientras que P_0 se reduce a (60.4%). En ($t = 10$), r pasa a ser el parámetro dominante (64.5%), desplazando aún más a P_0 , que cae a (25.9%). En ($t = 15$), r mantiene su predominio (62.1%), aunque K empieza a emerger con una influencia notable (26.9%), marcando el inicio de su transición hacia el control del sistema. A partir de ($t = 20$), K se convierte en el parámetro dominante (53.8%) y sigue aumentando. Este comportamiento se intensifica en ($t = 30$), donde K representa el (92.5%) de la sensibilidad total, mientras que P_0 y r prácticamente desaparecen.

Además, las diferencias entre (S_1) y (S_T) en distintos momentos reflejan interacciones entre parámetros. Por ejemplo, en ($t = 10$), (S_{T_r}) es mayor que (S_{1_r}), lo que sugiere que r interactúa significativamente con otros parámetros. A comparación con ($t = 30$), (S_{1_K}) y (S_{T_K}) son casi iguales, indicando que K actúa de manera independiente en la fase estable del modelo.

MCF: Es una técnica utilizada para clasificar simulaciones en función de su capacidad para cumplir con un criterio específico de desempeño. Para este caso, el criterio predefinido fue que la población final alcanzara el umbral de estabilidad $P(T = 30) > 5000$. En este análisis, se



generaron 2000 simulaciones Monte Carlo que se dividieron en dos subconjuntos: Subconjunto conductual, simulaciones aceptadas con estabilidad poblacional y Subconjunto no conductual, simulaciones rechazadas que no logran estabilizarse.

Las Funciones de Distribución Acumulativa Empírica (ECDFs) de los parámetros K , r y P_0 se trazaron para comparar las distribuciones correspondientes a los subconjuntos conductual y no conductual. Este análisis permitió visualizar cómo se distribuyen los valores de cada parámetro en simulaciones aceptadas y rechazadas. Para cuantificar las diferencias entre estas distribuciones, se empleó la prueba de Kolmogorov-Smirnov (KS), identificando los parámetros más sensibles. En la Figura 7, se presentan los resultados del análisis de sensibilidad realizado con MCF.

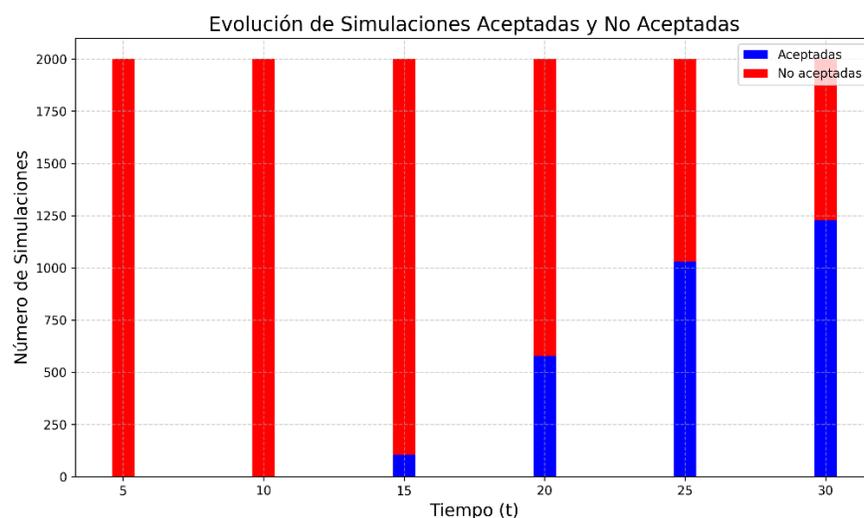


Figura 7. Distribución de simulaciones aceptadas y no aceptadas en distintos momentos temporales. El gráfico compara las simulaciones aceptadas ($P(T) > 5000$) con aquellas no aceptadas ($P(T) \leq 5000$) para $(t = 5, 10, 15, 20, 25, 30)$, resaltando la evolución de la estabilidad poblacional en el modelo logístico.

La Figura 7 muestra en las primeras fases del modelo ($t = 5, 10, 15, 20$), la mayoría de las simulaciones pertenecen al subconjunto no aceptado. Esto evidencia que, en estos períodos iniciales, la población aún no alcanza niveles suficientes para considerarse estable. Los resultados reflejan que, independientemente de las combinaciones de los parámetros K , r y P_0 , el modelo permanece en una fase de crecimiento inicial, insuficiente para superar el umbral definido.

A partir de ($t = 25$), comienzan a registrarse simulaciones aceptadas. Es probable que estas simulaciones estén asociadas con valores altos de K y r , que promueven un crecimiento más acelerado y posibilitan que el sistema se acerque a su capacidad máxima.

Finalmente, en ($t = 30$), se observa un incremento significativo en el número de simulaciones aceptadas. Este resultado indica que, en muchas de las simulaciones realizadas, el sistema ha alcanzado un estado estable. Sin embargo, persisten simulaciones no aceptadas.

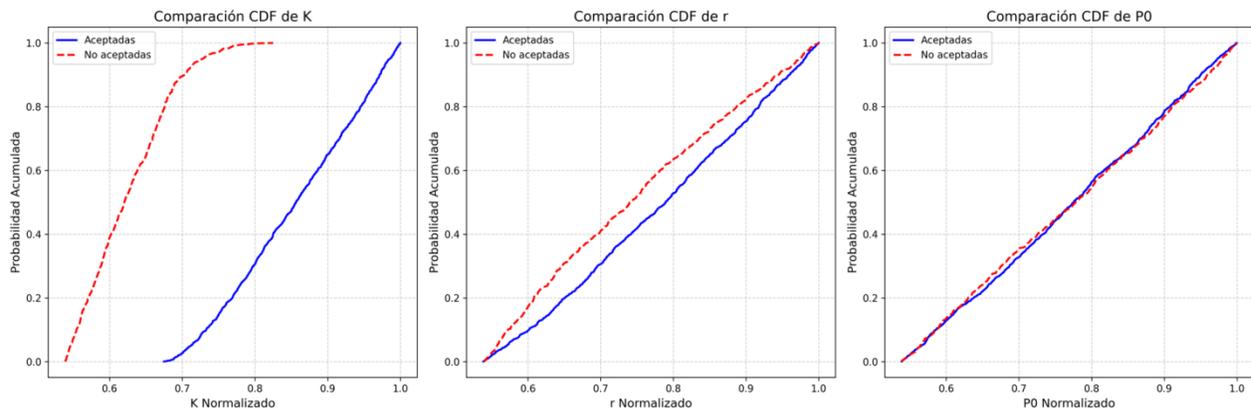


Figura 8. Comparación ECDFs para los parámetros K , r y P_0 . La figura ilustra las distribuciones de simulaciones aceptadas ($P(T = 30) > 5000$, azul) y no aceptadas ($P(T = 30) \leq 5000$, rojo).

El análisis ECDFs, representado en la Figura 8, refuerza la comprensión de la influencia de los parámetros K , r y P_0 en la clasificación de las simulaciones. Los resultados de la prueba de KS para K mostraron una discrepancia máxima de 0.8773, con un p -value de < 0.0001 ($p < 0.05$), lo que confirma una diferencia sustancial entre las distribuciones de simulaciones aceptadas y no aceptadas. Esta evidencia estadística respalda que K es el parámetro más influyente.

En cuanto a r , la prueba KS reflejó una discrepancia máxima de 0.1202 y un p -value de < 0.0001 ($p < 0.05$). Aunque la diferencia entre las distribuciones es menor, sigue siendo significativa.

Por otro lado, los resultados de P_0 no revelaron diferencias significativas entre los dos grupos. La prueba KS mostró una discrepancia máxima de 0.0284 con un p -value de 0.8256 ($p > 0.05$), lo que indica que las distribuciones de P_0 para simulaciones aceptadas y no aceptadas son prácticamente idénticas, es decir, no tiene un impacto significativo en la clasificación de las simulaciones.

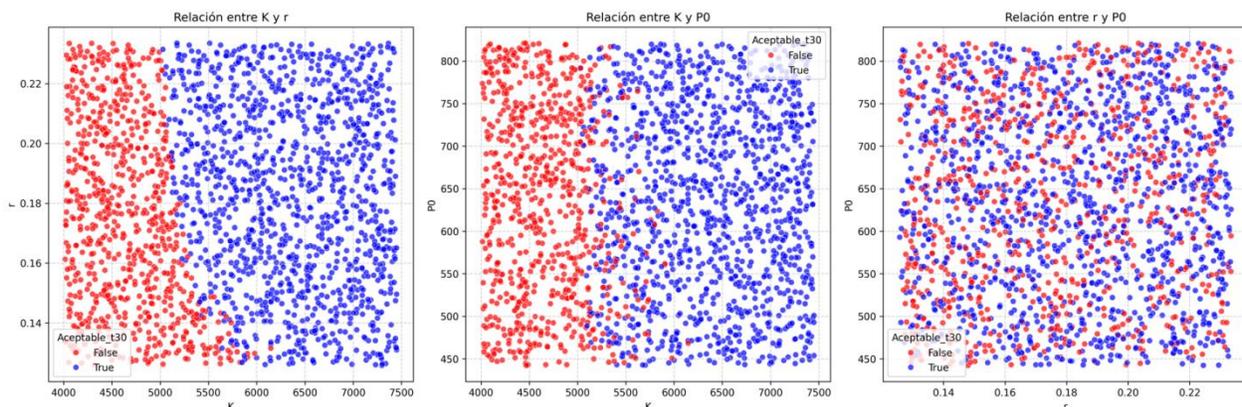


Figura 9. Relación entre los parámetros K , r y P_0 . Los gráficos ilustran la clasificación de simulaciones en dos grupos: aceptadas ($P(T = 30) > 5000$, puntos azules) y no aceptadas ($P(T = 30) \leq 5000$, puntos rojos). Cada punto representa una simulación específica con una combinación única de K , r y P_0 .



En la Figura 9, el gráfico izquierdo (relación entre K y r), determina una separación clara entre las simulaciones aceptadas y no aceptadas basada en los valores de K . Las simulaciones aceptadas tienden a concentrarse en valores altos de K (> 5500), mientras que valores de K (< 5000) están asociados con simulaciones no aceptadas, el parámetro r no muestra un efecto determinante.

En el gráfico del centro (relación entre K y P_0), se ve un refuerzo en la influencia de K . Las simulaciones aceptadas se concentran en valores altos de K (> 5500), mientras que las no aceptadas en valores bajos de K (< 5000) y P_0 no tiene un impacto significativo en la clasificación.

El gráfico derecho (relación entre r y P_0) no muestra una separación entre simulaciones aceptadas y no aceptadas. Los puntos azules y rojos están distribuidos de manera aleatoria en todo el rango de r y P_0 , lo que indica que, al combinar estos parámetros, no se observan patrones que afecten directamente la clasificación de las simulaciones.

Comparación entre métodos: Para garantizar una comparación adecuada entre los tres enfoques, Morris, Sobol y MCF, es esencial transformar los valores obtenidos de cada método a una escala común. Esto se debe a que cada técnica evalúa la sensibilidad de manera diferente. La normalización o estandarización de los datos es fundamental para interpretar correctamente las contribuciones relativas de los parámetros bajo cada método. Según el análisis de (7), el método Sobol destaca por medir el impacto de los parámetros en la varianza total del modelo, lo que proporciona una visión cuantitativa de cómo cada parámetro contribuye a la variabilidad de la salida.

Por su parte, el método Morris tiene la ventaja de capturar tanto la variabilidad como las interacciones entre los parámetros. Esto lo convierte en una herramienta ideal para los análisis dinámicos. A diferencia de MCF que adopta un enfoque centrado en la clasificación de escenarios, evaluando la relevancia de los parámetros según su capacidad para cumplir criterios predefinidos. Este método no mide sensibilidad como tal, sino que identifica parámetros críticos.

Incompatibilidad conceptual en un gráfico de serie temporal: Los métodos Sobol y Morris tienen la capacidad de representar la sensibilidad de los parámetros en función del tiempo, siempre que sus valores sean normalizados. Esto permite ubicarlos en un mismo eje temporal, facilitando la comparación dinámica de sus sensibilidades. Sin embargo, MCF presenta una limitación conceptual en este contexto, pues no genera un índice continuo asociado al tiempo. Esta discrepancia metodológica implica que integrar MCF en un gráfico de serie temporal con Sobol y Morris es complejo (probablemente innecesario) porque no comparte la misma estructura de sensibilidad dinámica.

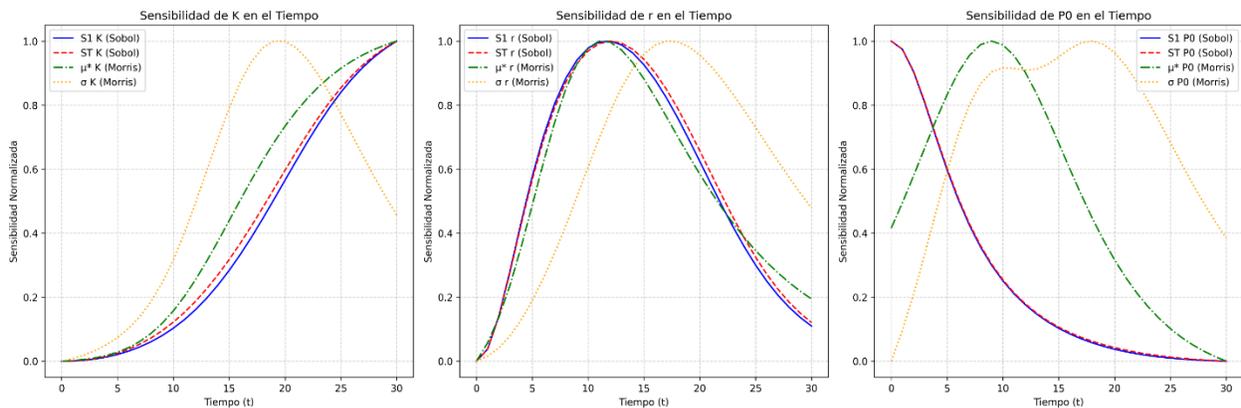


Figura 10. Evolución temporal de la sensibilidad para los métodos Sobol y Morris. Cada gráfico presenta la sensibilidad normalizada de un parámetro K , r y P_0 en función del tiempo. Las métricas de Sobol (S_1 , S_T) y Morris (μ^* , σ) se comparan, reflejando distintos enfoques para analizar la influencia de los parámetros en la dinámica del modelo. Esta visualización destaca cómo cada método caracteriza la sensibilidad de manera complementaria a lo largo de la evolución temporal.

Los resultados evidencian una transición clara en la importancia de los parámetros K , r y P_0 en diferentes fases del tiempo, de acuerdo con las métricas proporcionadas por Sobol (S_1 , S_T) y Morris (μ^* , σ). Entonces, desde la Figura 10, la sensibilidad de K aumenta gradualmente con el tiempo, alcanzando su máximo en la fase final del modelo. Tanto Sobol (S_T) como Morris (μ^*) destacan a K como el principal regulador de la estabilidad poblacional, r muestra una sensibilidad máxima durante la fase intermedia del modelo ($t = 10$ a $t = 20$). Su alta variabilidad (σ) en este intervalo sugiere que su impacto está influenciado por interacciones con otros parámetros. Esto refleja que r juega un papel crítico en la regulación del crecimiento poblacional en la etapa de transición del modelo. La influencia de P_0 es significativa al inicio del modelo, dominando en ($t = 0$). Sin embargo, su sensibilidad disminuye rápidamente con el tiempo. rapi

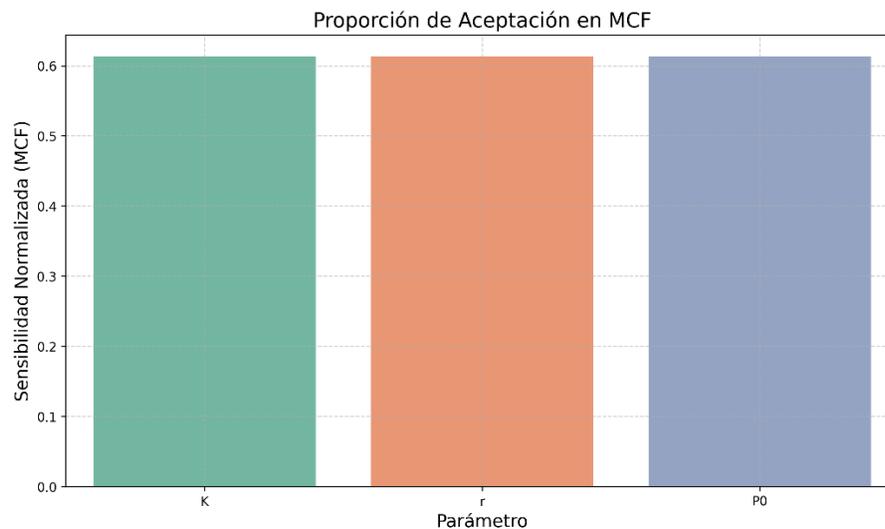


Figura 11. Proporción de simulaciones aceptadas en función de los parámetros mediante MCF. El gráfico presenta la sensibilidad global de los parámetros K , r y P_0 , mostrando la proporción de simulaciones aceptadas ($P(T = 30) > 5000$) en una escala normalizada.



La Figura 11 presenta la sensibilidad global, utilizando un gráfico de barras en lugar de una serie temporal. Este enfoque refleja la contribución relativa de cada parámetro en la proporción de simulaciones aceptadas. Los resultados indican que los tres parámetros tienen una contribución similar en la clasificación de simulaciones aceptadas resaltando el hecho que, todos estos, participan de manera notable en garantizar la estabilidad del modelo. Sin embargo, el gráfico no permite diferenciar los momentos específicos en los que cada parámetro es más relevante, dado que MCF no genera índices dinámicos en función del tiempo, a diferencia de los métodos Sobol y Morris, que capturan la evolución temporal de la sensibilidad y las interacciones entre parámetros. MCF se centra más en evaluar la importancia de los parámetros en un instante final.

Comparación de eficiencia computacional y selección de métodos de sensibilidad:

Para evaluar la eficiencia de los métodos de análisis de sensibilidad (Morris, Sobol y MCF)(22), es crucial considerar dos aspectos clave: el tiempo de ejecución y el uso de memoria. Estos criterios permiten determinar qué método es más adecuado según los recursos computacionales disponibles y las necesidades específicas del estudio. Los resultados presentados en la Tabla 5 facilitan la visualización y comparación de estos aspectos clave:

Tabla 5. Comparación de Eficiencia Computacional

<i>Método</i>	<i>Tiempo de Ejecución (s)</i>	<i>Uso de Memoria (MiB)</i>
<i>Morris</i>	0.0368	0.2266 MiB
<i>Sobol</i>	131.53526	390.539 MiB
<i>MCF</i>	5.99	17.18 MB

En términos de tiempo de ejecución, el método Morris es claramente el más eficiente por su rapidez, mientras que Sobol presenta una ejecución significativamente más lenta. En cuanto al uso de memoria, Morris también destaca por ser el menos exigente, seguido por MCF, que mantiene un consumo moderado. Sobol requiere un alto gasto de memoria, lo que puede limitar su aplicabilidad en sistemas con recursos computacionales limitados.

**Tabla 6. Tabla Comparativa de Métodos de Sensibilidad**

Método	Tipo de Output	Cantidad de Simulaciones	Detección de Interacciones	Precisión / Robustez	Aplicabilidad (Ventajas y Limitaciones)
Sobol	Índices de sensibilidad cuantitativos: Captura la proporción de varianza explicada.	Alta, requiere muchas simulaciones ($N(k+2)$).	Sí.	Alta precisión si el número de simulaciones es suficiente.	Útil para análisis detallado final. Proporciona información completa de cómo cada parámetro influye en el resultado.
Morris	Medidas de efecto elemental: media μ^* y desviación σ . Salida semi-cuantitativa.	Media, orden de $r(k+1)$.	Parcial.	Robusto cualitativamente: identifica factores dominantes con bajo costo computacional	Ideal en etapas iniciales o con muchos parámetros. Fácil de implementar y computacionalmente barato.
MCF	Distinción de escenarios según salida. Identifica parámetros influyentes con pruebas estadísticas (p-valores, KS).	Media-Alta – Requiere muestreo amplio para obtener buen poder estadístico.	Limitada.	Moderada. Resultados dependen del criterio de filtro (umbral) y del tamaño muestral.	Útil para análisis de riesgo y toma de decisiones. Identifica parámetros críticos para escenarios extremos.

Desde la Tabla 6, la elección del método más adecuado dependerá del balance entre precisión, recursos disponibles y el propósito del estudio. Morris es ideal para estudios preliminares con limitaciones computacionales, mientras que Sobol es más adecuado para análisis detallados cuando los recursos no son un problema. Por su parte, MCF es útil para evaluar la estabilidad y clasificación de parámetros sin necesidad de un análisis temporal continuo.

DISCUSIÓN

El ASG aplicado al modelo logístico de meningitis en Ecuador permitió evaluar las diferencias en la influencia de los parámetros clave: k , r y P_0 . Mediante los enfoques de Sobol, Morris y MCF, se analizó no solo la magnitud de la sensibilidad de cada parámetro, sino también su estabilidad y variabilidad a lo largo del tiempo, proporcionando una visión integral de su impacto en la dinámica del sistema.



Los resultados de este estudio revelan que el parámetro K (capacidad de carga) es el más determinante en la estabilidad poblacional del modelo logístico aplicado a la meningitis. Esta observación es coherente con lo reportado por (14), quienes destacan que los parámetros con influencia sostenida y baja variabilidad temporal suelen ser estructurales en modelos dinámicos. En particular, MCF mostró que K tiene la mayor diferencia entre simulaciones aceptadas y rechazadas, confirmando su papel fundamental en la estabilidad a largo plazo. Morris, a través de μ^* y σ , confirmó que la influencia de K es alta y relativamente constante. Aunque Sobol también lo identificó como relevante, le asignó menor sensibilidad, una diferencia que puede atribuirse a las limitaciones del método para capturar cambios temporales graduales, como señalan (23).

La tasa de crecimiento r presentó una influencia intermedia, especialmente relevante durante la fase de expansión del sistema, lo cual es consistente con la literatura sobre modelos epidemiológicos tipo SIR (8). Morris mostró una alta variabilidad en r , lo que indica que su efecto depende de las interacciones paramétricas. MCF también lo clasificó como relevante en la transición entre fases, aunque con menor peso que K . Sobol mostró sensibilidad intermedia, en línea con lo observado por (24), donde la tasa de crecimiento explica parte significativa de la varianza en modelos biológicos, aunque no domina en fases estabilizadas.

El parámetro P_0 (población inicial) tuvo un impacto limitado, restringido a las primeras etapas del modelo. Sobol lo situó como el de menor influencia, en coherencia con Savatorova(25), quienes reportan que la importancia de las condiciones iniciales decrece con el tiempo en modelos logísticos. Morris detectó una variabilidad moderada en P_0 , indicando interacciones tempranas, pero MCF mostró que no contribuye significativamente a la clasificación de aceptabilidad.

Cada método de análisis aportó perspectivas complementarias. Sobol permitió descomponer la varianza de forma detallada, siendo útil cuando se busca precisión cuantitativa. Morris fue computacionalmente eficiente, capturando tanto magnitud como variabilidad de los efectos, ideal para estudios exploratorios. MCF, aunque más limitado en términos cuantitativos, fue útil para evaluar escenarios críticos y decisiones binarias, alineado con enfoques de riesgo en salud pública. Como señalan (26), combinar métodos de ASG permite una comprensión más integral del modelo, como se evidencia en este estudio.

En resumen, los hallazgos coinciden con la literatura sobre análisis de sensibilidad en modelos dinámicos no lineales y validan la utilidad de aplicar múltiples métodos de forma integrada para caracterizar la sensibilidad de parámetros en horizontes temporales. Este enfoque proporciona una base sólida para la toma de decisiones informadas en epidemiología.

CONCLUSIONES

El análisis de sensibilidad evidenció que la influencia de los parámetros del modelo logístico varía en el tiempo. La capacidad de carga (K) se consolidó como el factor más determinante en la estabilidad a largo plazo, mientras que la tasa de crecimiento (r) desempeñó un rol crítico en la



fase de expansión. La población inicial (P_0), por su parte, fue relevante únicamente en las primeras etapas, perdiendo impacto conforme el sistema se estabilizaba. Esta evolución temporal es clave para comprender el comportamiento del modelo frente a escenarios epidemiológicos reales.

Cada técnica empleada ofreció perspectivas complementarias. Sobol permitió cuantificar con precisión los efectos principales e interacciones entre parámetros; Morris destacó por su eficiencia computacional y su capacidad para reflejar la variabilidad temporal; mientras que Monte Carlo Filtering (MCF) permitió una clasificación binaria robusta de escenarios aceptables según criterios epidemiológicos. La normalización comparativa aplicada en este estudio facilitó la interpretación entre métodos, superando las diferencias estructurales en sus métricas.

La integración metodológica permitió una evaluación robusta del modelo logístico aplicado a la meningitis en Ecuador. Más allá de sus aportes teóricos, el enfoque propuesto constituye una herramienta práctica para la calibración de modelos en contextos reales y la toma de decisiones en salud pública. Su capacidad para identificar qué parámetros son críticos, en qué momento, y en qué condiciones, lo hace especialmente útil en entornos donde la disponibilidad de datos es limitada y la planificación debe ser oportuna y bien fundamentada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Minni Jain, Prajwal Kumar Bhati, Pranav Kataria, Rohit Kumar. Modelling Logistic Growth Model for COVID-19 Pandemic in India. IEEE. 2020;
2. Reyné B, Richard Q, Selinger C, Sofonea MT, Djidjou-Demasse R, Alizon S. Non-Markovian modelling highlights the importance of age structure on Covid-19 epidemiological dynamics. *Math Model Nat Phenom.* 2022;17.
3. Chiogna G, Marcolini G, Engel M, Wohlmuth B. Sensitivity analysis in the wavelet domain: a comparison study. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment.* 2024 Apr 1;38(4):1669–84.
4. Tarantola S, Ferretti F, Lo Piano S, Kozlova M, Lachi A, Rosati R, et al. An annotated timeline of sensitivity analysis. *Environmental Modelling and Software.* 2024 Mar 1;174.
5. Saltelli A, Tarantola S, Campolongo F, Ratto M. *Sensitivity Analysis in Practice : A Guide to Assessing Scientific Models.* Wiley J, editor. Italy: Hohn Wilwy & Sons Ltd.; 2004. 1–232 p.
6. Zhang Z, Gul R, Zeb A. Global sensitivity analysis of COVID-19 mathematical model. *Alexandria Engineering Journal.* 2021 Feb 1;60(1):565–72.
7. Li J, Cheng Z. Global Sensitivity Analysis of Binary Response Model Based on Shapley Value. In: *Proceedings - 2024 10th International Symposium on System Security, Safety, and Reliability, ISSSR 2024.* Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.; 2024. p. 303–9.



8. Liu D, Li L, Rostami-Hodjegan A, Bois FY, Jamei M. Considerations and Caveats when Applying Global Sensitivity Analysis Methods to Physiologically Based Pharmacokinetic Models. *AAPS Journal*. 2020 Sep 1;22(5).
9. Tajuddeen I, Rodrigues E. A Morris sensitivity analysis of an office building's thermal design parameters under climate change in sub-Saharan Africa. *Build Environ*. 2024 Aug 15;262.
10. Puy A, Saltelli A, Piano S Lo, Levin SA. sensobol: An R Package to Compute Variance-Based Sensitivity Indices. *J Stat Softw*. 2022;102(5).
11. Herman J, Usher W. SALib: An open-source Python library for Sensitivity Analysis. *The Journal of Open Source Software*. 2022 Mar;2.
12. Tosin M, Cortes A, Cunha Americo. A Tutorial on Sobol' Global Sensitivity Analysis Applied to Biological Models. HAL open science [Internet]. 2020 Oct 14;10. Available from: <https://hal.science/hal-02967410v1>
13. Saloni Dattani. How are causes of death registered around the world. *Our World in Data*. 2023;
14. Saltelli Andrea, Ratto Marco, Andres Terry, Campolongo Francesca, Cariboni Jessica, Gatelli Debora, et al. *Global Sensitivity Analysis. The Primer*. England; 2008.
15. Lovric M. *International Encyclopedia of Statistical Science*. 1st edition. Lovric M, editor. Springer Berlin, Heidelberg; 2011. CLXXI, 1671.
16. Sysoev A. Sensitivity Analysis of Mathematical Models. *Computation*. 2023 Aug 1;11(8).
17. Saltelli A, Aleksankina K, Becker W, Fennell P, Ferretti F, Holst N, et al. Why so many published sensitivity analyses are false: A systematic review of sensitivity analysis practices. *Environmental Modelling and Software*. 2019 Apr 1;114:29–39.
18. Chen L, Xu Z, Huang D, Chen Z. An Improved Sobol Sensitivity Analysis Method. In: *Journal of Physics: Conference Series*. Institute of Physics; 2024.
19. Shonkwiler RW, Mendivil F. *Explorations in Monte Carlo Methods* [Internet]. New York, NY: Springer New York; 2009. (Undergraduate Texts in Mathematics). Available from: <https://link.springer.com/10.1007/978-0-387-87837-9>
20. Tuffin B, L'ecuyer Editors P. *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods* [Internet]. Tuffin B, L'ecuyer Editors P, editors. Vol. 324. 2018. Available from: <http://www.springer.com/series/10533>
21. 'Carmona A "Cabreró", 'Muñoz, C. University of Florida. 2024. Notebook 3: Monte Carlo Filtering (MCF): Design of interventions.



22. Dai H, Liu Y, Guadagnini A, Yuan S, Yang J, Ye M. Comparative Assessment of Two Global Sensitivity Approaches Considering Model and Parameter Uncertainty. *Water Resour Res.* 2024 Feb 1;60(2).
23. Pianosi F, Sarrazin F, Wagener T. A Matlab toolbox for Global Sensitivity Analysis. *Environmental Modelling and Software.* 2015 Aug 1;70:80–5.
24. Lamboni MM and MHH and MD. Multivariate sensitivity analysis to measure global contribution of input factors in dynamic models. *Reliab Eng Syst Saf.* 2011;96:450–9.
25. Savatorova V. Exploring Parameter Sensitivity Analysis in Mathematical Modeling with Ordinary Differential Equations [Internet]. Vol. 16, CODEE Journal. 2023. Available from: <https://scholarship.claremont.edu/codee> Available at: <https://scholarship.claremont.edu/codee/vol16/iss1/4>
26. de Rocquigny EDNTS. *Uncertainty in Industrial Practice: A Guide to Quantitative Uncertainty Management.* Chichester, UK: Wiley; 2008. 1–432 p.